Глава V. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Лекции 13–22

§ 13. МНОЖЕСТВА. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

13.1. Основные понятия

Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под ***множеством*** понимают совокупность (собрание, класс, семейство...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве студентов института, о множестве рыб в Черном море, о множестве корней уравнения $x^2 + 2x + 2 = 0$, о множестве всех натуральных чисел и т. д.

Объекты, из которых состоит множество, называются его ***элементами***. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, а их элементы — малыми буквами $a, b, \ldots, x, y, \ldots$

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$; запись $x \overline{\in} X$ или $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***, обозначается символом $\varnothing$.

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены (если это возможно), либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Например, запись $A = \{1, 3, 15\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 1, 3 и 15; запись $A = \{x : \ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ означает, что множество A состоит из всех действительных (если не оговорено иное) чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначают так $A \subset B$ («A включено в B») или $B \supset A$ («множество B включает в себя множество A»).

Говорят, что множества A и B ***равны*** или ***совпадают***, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

Объединением (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение (сумму) множеств обозначают $A \cup B$ (или $A + B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x : \ x \in A$ или $x \in B\}$.

Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Пересечение (произведение) множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$.

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать *некоторые* простейшие логические символы:

$\alpha \implies \beta$ — означает «из предложения α *следует* предложение β»;

$\alpha \iff \beta$ — «предложения α и β равносильны», т. е. из α следует β и из β следует α;

$\forall$ — означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ — «существует», «найдется»;

$:$ — «имеет место», «такое что»;

$\mapsto$ — «соответствие».

Например: 1) запись $\forall x \in A : \alpha$ означает: «для всякого элемента $x \in A$ имеет место предложение α»;

2) $(x \in A \cup B) \iff (x \in A \quad \text{или} \quad x \in B)$; эта запись определяет объединение множеств A и B.

13.2. Числовые множества. Множество действительных чисел

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; \ldots; n; \ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots; \pm n; \ldots\}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : \; m \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N} \right\}$ — множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

13.3. Числовые промежутки. Окрестность точки

Пусть a и b — действительные числа, причем $a < b$.

Числовыми промежутками (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

$[a; b] = \{x : \; a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок (сегмент, замкнутый промежуток);

$(a; b) = \{x : \; a < x < b\}$ — интервал (открытый промежуток);

$[a; b) = \{x : \; a \leqslant x < b\}$;

$(a; b] = \{x : \; a < x \leqslant b\}$ — полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки);

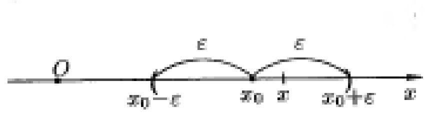
$(-\infty; b] = \{x : \; x \leqslant b\}$; $\qquad [a, +\infty) = \{x : \; x \geqslant a\}$;

$(-\infty; b) = \{x : \; x < b\}$; $\qquad (a, +\infty) = \{x : \; x > a\}$;

$(-\infty, \infty) = \{x : \; -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$ — бесконечные интервалы (промежутки).

Числа a и b называются соответственно левым и правым *концами* этих промежутков. Символы $-\infty$ и $+\infty$ не числа, это символическое обозначение процесса неограниченного удаления точек числовой оси от начала 0 влево и вправо.

Пусть x_0 — любое действительное число (точка на числовой прямой). ***Окрестностью*** точки x_0 называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ***ε-окрестностью*** точки x_0. Число x_0 называется ***центром***, а число ε — ***радиусом***.



§ 14. ФУНКЦИЯ

14.1. Понятие функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x)$, $x \in X$ или $f : X \to Y$. Говорят еще, что функция f ***отображает*** множество X на множество Y.

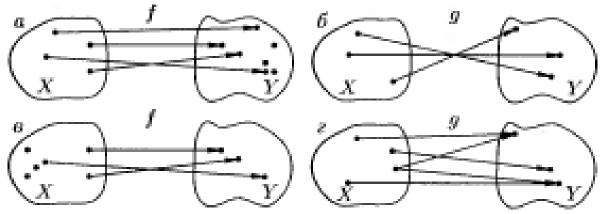


Рис. 98

Например, соответствия f и g, изображенные на рисунке 98 *а* и *б*, являются функциями, а на рисунке 98 *в* и *г* — нет. В случае *в* — не каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. В случае *г* не соблюдается условие однозначности.

Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

14.2. Числовые функции. График функции. Способы задания функций

Пусть задана функция $f : X \to Y$.

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т. е. $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$), то функцию f называют ***числовой функцией***. В дальнейшем будем изучать (как правило) числовые функции, для краткости будем именовать их просто функциями и записывать $y = f(x)$.

Переменная x называется при этом *аргументом* или независимой переменной, а y — *функцией* или *зависимой переменной* (от x). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости*. Иногда функциональную зависимость y от x пишут в виде $y = y(x)$, не вводя новой буквы (f) для обозначения зависимости.

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывают так: $f(a)$. Например, если $f(x) = 2x^2 - 3$, то $f(0) = -3$, $f(2) = 5$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

Например, графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса $R = 1$ с центром в $O(0; 0)$ (см. рис. 99).

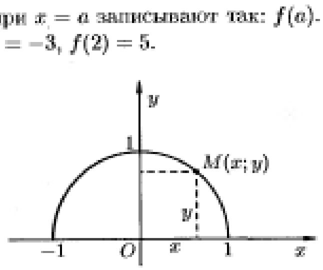


Рис. 99

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

14.6. Основные элементарные функции и их графики

Основными элементарными функциями называют следующие функции.

1) *Показательная* функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. На рис. 104 показаны графики показательных функций, соответствующие различным основаниям степени.

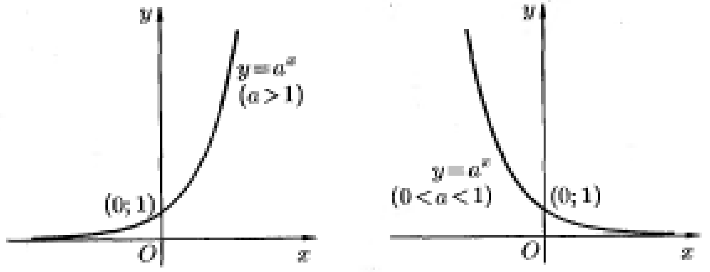
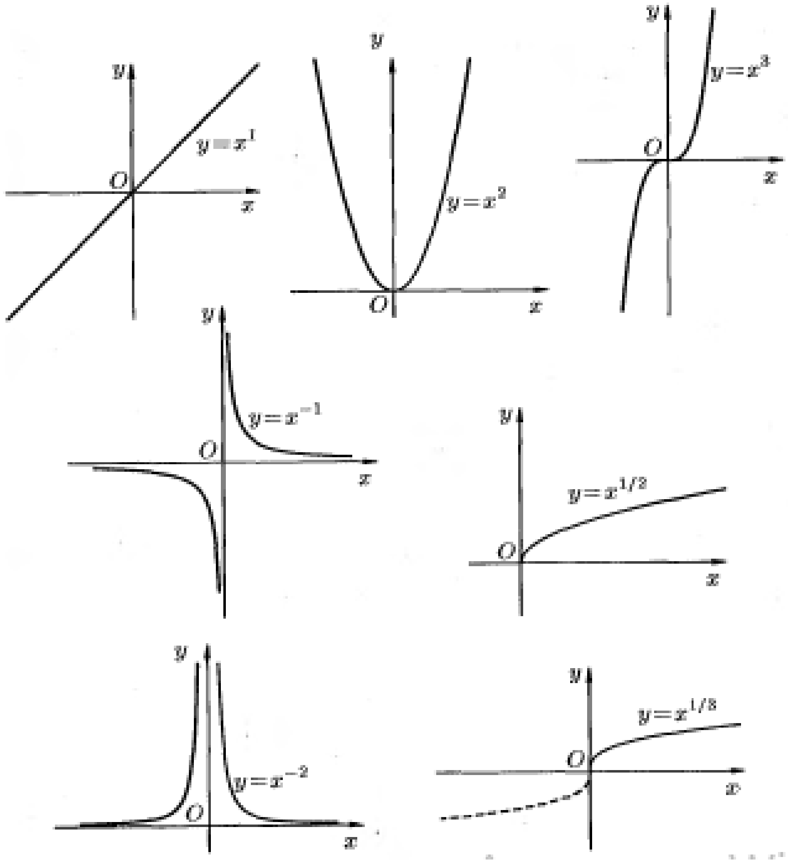
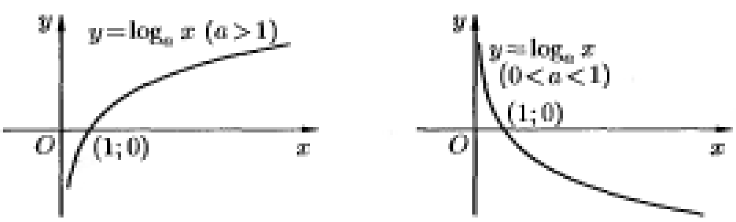


Рис. 104

2) *Степенная* функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным показателям степени, предоставлены на рис. 105.



3) *Логарифмическая* функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; Графики логарифмических функций, соответствующие различным основаниям, показаны на рис. 106.



4) *Тригонометрические* функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; Графики тригонометрических функций имеют вид, показанный на рис. 107.

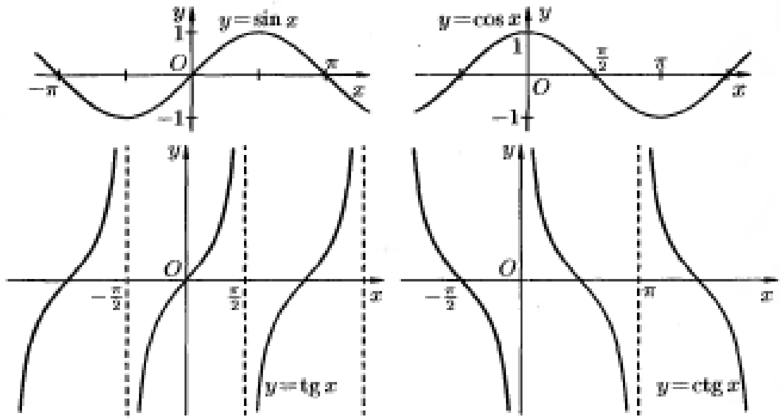
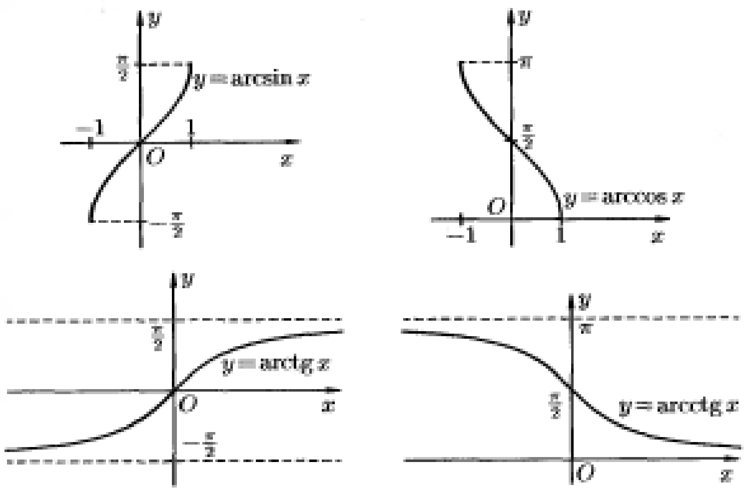


Рис. 107

5) *Обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. На рис. 108 показаны графики обратных тригонометрических функций.



Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется ***элементарной функцией***. Примерами элементарных функций могут служить функции

$$y = 3^{\cos\sqrt{x}}; \quad y = \arcsin\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{tg} x}{8x^2+3}; \quad y = \lg(2 + x^3).$$

§ 15. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

15.1. Числовая последовательность

Под ***числовой последовательностью*** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ понимается функция

$$\boxed{x_n = f(n),} \tag{15.1}$$

заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$ или x_n, $n \in \mathbb{N}$. Число x_1 называется первым членом (элементом) последовательности, x_2 — вторым, …, x_n — ***общим*** или ***n-м членом последовательности***.

Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена. Формула (15.1) позволяет вычислить любой член последовательности по номеру n, по ней можно сразу вычислить любой член последовательности. Так, равенства

$$v_n = n^2 + 1, \quad z_n = (-1)^n \cdot n, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

задают соответственно последовательности

$$v_n = \{2, 5, 10, \ldots, n^2+1, \ldots\}; \qquad z_n = \{-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots\};$$

$$y_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}; \qquad u_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant M.$$

В противном случае последовательность называется неограниченной. Легко видеть, что последовательности y_n и u_n ограничены, а v_n и z_n — неограничены.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (***неубывающей***), если для любого n выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} \geqslant a_n$). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Все эти последовательности называются ***монотонными*** последовательностями. Последовательности v_n, y_n и u_n монотонные, а z_n — не монотонная.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу c, то ее называют *постоянной*.

Другой способ задания числовых последовательностей — *рекуррентный способ*. В нем задается начальный элемент x_1 (первый член последовательности) и правило определения n-го элемента по $(n-1)$-му:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Таким образом, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ и т. д. При таком способе задания последовательности для определения 100-го члена надо сначала посчитать все 99 предыдущих.

15.2. Предел числовой последовательности

Можно заметить, что члены последовательности u_n неограниченно приближаются к числу 1. В этом случае говорят, что последовательность u_n, $n \in \mathbb{N}$ стремится к пределу 1.

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{15.2}$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ или $x_n \to a$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (или переменная x_n, пробегающая последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$) имеет предел, равный числу a (или x_n стремится к a). Говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к* a.

Коротко определение предела можно записать так:

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \iff \lim_{n\to\infty} x_n = a.}$$

15.3. Предельный переход в неравенствах

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$.

Теорема 15.1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \leqslant y_n$, то $a \leqslant b$.

❑ Допустим, что $a > b$. Из равенств $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будут выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ и $|y_n - b| < \varepsilon$, т. е. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ и $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Тогда: $x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, т. е. $x_n > \frac{a+b}{2}$ и $y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$, т. е. $y_n < \frac{a+b}{2}$. Отсюда следует, что $x_n > y_n$. Это противоречит условию $x_n \leqslant y_n$. Следовательно, $a \leqslant b$. ■

Теорема 15.2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и справедливо неравенство $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ (начиная с некоторого номера), то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

(Примем без доказательства.)

Теорема 15.3 (Вейерштрасс). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

§ 16. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

16.1. Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Сформулируем два, эквивалентных между собой, определения предела функции в точке.

Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, $n \in \mathbb{N}$ $(x_n \neq x_0)$, сходящейся к x_0 (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к числу A (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$. Геометрический смысл предела функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означает, что для всех точек x, достаточно близких к точке x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A.

Определение 2 (на «языке ε-δ», или по Коши). Число A называется ***пределом функции в точке*** x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Это определение коротко можно записать так:

$$\left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x:\ \underbrace{|x - x_0| < \delta,\quad x \neq x_0}_{\text{или } 0 < |x - x_0| < \delta} \implies |f(x) - A| < \varepsilon\right) \iff$$

$$\iff \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при x, стремящемся к a, если

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Иными словами, функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 <$ $< |x - a| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при x, стремящемся к a, если для любого $N > 0$ существует число $\delta(N)$ такое, что при $0 < |x - a| < \delta(N)$ выполняется неравенство $|f(x)| > N$; это записывается так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Аналогично определяются бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x \to \infty$. Бесконечно большие функции находятся в тесной связи с функциями бесконечно малыми. Если при данном предельном переходе функция $f(x)$ является бесконечно большой, то функция $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ будет бесконечно малой при том же предельном переходе, и обратно.

В дальнейшем в этом параграфе, формулируя то или иное положение о бесконечно малых функциях, будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз, что все эти функции являются бесконечно малыми при одном и том же предельном переходе.

Свойства бесконечно малых функций

1) *Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

2) *Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

3) *Произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную есть функция бесконечно малая.*